JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 54, 274–286 (1988)

Asymptotische Approximation stetiger Funktionen durch Funktionenreihen

LOTHAR HOISCHEN

Mathematisches Institut der Universität Giessen, D-6300 Giessen, West Germany

Communicated by R. Bojanic

Received February 18, 1986

Nach dem Satz von Carleman [1], [4] gibt es zu jeder auf $(-\infty, \infty)$ stetigen Funktion f und zu jeder auf $(-\infty, \infty)$ positiven, stetigen Funktion h eine in der ganzen komplexen Ebene analytische Funktion g mit

$$|f(s)-g(s)|<h(s) \qquad (-\infty<s<\infty).$$

In dieser Arbeit soll in Form einer allgemeineren Theorie untersucht werden, durch welche Funktionenreihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n K_n(s)$ anstelle der im Satz von Carleman benutzten Potenzreihen $g(s)$ solche asymptotischen Approximationen stetiger Funktionen möglich sind.

Es bezeichnen dazu $C(0, \infty]$ und $C[-\infty, \infty)$ die Klassen der in $(0, \infty)$ bzw. $(-\infty, \infty)$ komplexwertigen stetigen Funktionen f, für die $\lim_{s\to\infty} f(s)$ bzw. $\lim_{s\to-\infty} f(s)$ existiert.

Wir sagen, daß ein System S von Funktionen $K_n \in C(0, \infty]$ $(n=1, 2, ...)$ bezüglich $s \to +0$ die asymptotische Approximationseigenschaft (A_0) hat, falls zu jedem $f \in C(0, \infty]$ und zu jeder auf $(0, \infty)$ positiven Funktion $h \in C(0, \infty]$ mit $\lim_{s\to\infty} h(s)>0$ eine für $s>0$ absolut konvergente Reihe $g(s)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n K_n(s)$ existiert mit

$$|f(s)-g(s)|<h(s) \qquad (s>0).$$

Entsprechend hat ein System S von Funktionen $K_n \in C[-\infty, \infty)$ bezüglich $s \to \infty$ die Eigenschaft (A_∞), falls zu beliebigen f, $h \in C[-\infty, \infty)$ mit h positiv und $\lim_{s\to-\infty} h(s)>0$ eine auf $(-\infty, \infty)$ absolut konvergente Reihe $g(s)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n K_n(s)$ existiert mit

$$|f(s)-g(s)|<h(s) \qquad (-\infty<s<\infty).$$

0021-9045/88 $3.00

In dieser Arbeit werden mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln hinreichende und notwendige Bedingungen dafür hergeleitet, daß ein System S die Eigenschaft (A_0) bzw. (A_∞) besitzt.

Die allgemeine Methode zur Herleitung solcher äquivalenter Bedingungen besteht dabei einerseits in dem Nachweis, daß diese asymptotischen Approximationen gleichwertig sind mit ε-Approximationen durch endliche Summen $\sum_{n=1}^{N} a_n K_n(s)$ auf den kompakten Teilmengen von $(0, \infty)$ bzw. $(-\infty, \infty)$ bei gewissen zusätzlichen Koeffizientenbeschränkungen für die a_n. Andererseits läßt sich daraus funktionalanalytisch die Äquivalenz von (A_0) bzw. (A_∞) mit gewissen Identitätsbedingungen zugehöriger Integraltransformationen der K_n herleiten.

Speziell für Dirichletsche Reihen, die in der rechten Halbebene absolut konvergieren, wobei $K_n(s) = e^{-s\lambda_n}$ mit verschiedenen $\lambda_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist, wurden in [5] äquivalente Bedingungen für (A_0) hergeleitet.

Wir sagen, daß eine Folge (λ_n) mit $\lambda_n > 0$ für ein $d \geqslant 0$ die Identitätseigenschaft (M_d) hat, wenn für jedes $q > 0$ aus

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda_n} d\alpha(t) = \mathcal{O}(e^{-(q+d)\lambda_n}) \; (n \to \infty), \qquad \int_0^\infty |d\alpha(t)| < \infty$$

mit normiertem α stets $\alpha(t) = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant q)$ folgt. Dabei heißt α normiert, wenn α in jedem $t > 0$ linksseitig stetig ist mit $\alpha(0) = 0$. Ferner hat (λ_n) für ein $d \geqslant 0$ die Eigenschaft (B_d), wenn zu jedem $q > 0$, zu jeder auf $[0, q+d]$ stetigen Funktion f mit $f(s) = 0$ $(s \in [q, q+d])$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein verallgemeinertes Polynom $P(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-s\lambda_n}$ existiert mit

$$|f(s) - P(s)| < \varepsilon (s \in [0, q+d]) \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{N} |a_n| \, e^{-(q+d)\lambda_n} < \varepsilon.$$

Im Falle $d = 0$ ist hierbei die Forderung $f(s) = 0$ für $s \in [q, q+d]$ durch $f(q) = 0$ zu ersetzen.

Offensichtlich folgt (M_d) aus (M_0) für jedes $d > 0$, und (M_d) impliziert (M_c) für alle $c > d$.

Als Erweiterung des Satzes von Müntz zu einer asymptotischen Approximation wurde in [5] gezeigt

Satz 1. *Das System S mit $K_n(s) = e^{-s\lambda_n}$ und verschiedenen $\lambda_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ hat genau dann die Eigenschaft (A_0), wenn für (λ_n) die Eigenschaft (M_0) gilt, wobei (M_0) und (B_0) äquivalent sind.*

Im Falle ganzer Dirichletscher Reihen, also für $K_n(s) = e^{s\lambda_n}$ $(-\infty < s < \infty)$ lassen sich mit den Beweismethoden dieser Arbeit auch äquivalente Bedingungen für (A_∞) herleiten.

Wir beweisen als Anwendung der allgemeineren Sätze dieser Arbeit

SATZ 2. *Das System S mit $K_n(s)=e^{s\lambda_n}$ und verschiedenen $\lambda_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$ hat genau dann die Eigenschaft (A_∞), wenn für (λ_n) die Eigenschaft (M_d) mit einem $d\geqslant 0$ gilt, wobei (M_d) und (B_d) für alle $d\geqslant 0$ äquivalent sind.*

Wir übernehmen aus [7]

SATZ 3. *Für jede Folge (λ_n) mit $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n=\infty$ und $\lambda_1>0$, $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant c>0$ $(n=1, 2, \ldots)$ gilt (M_0) und damit (M_d) für alle $d>0$.*

Ein neuer Beweis von Satz 3 wurde in [5, Folgerung aus Satz 3] gegeben. Für ganzzahlige λ_n folgt Satz 3 ferner aus [9, Theorem 3]. Die Gültigkeit von (A_∞) für $K_n=e^{s\lambda_n}$ wurde unter den Voraussetzungen von Satz 3 ferner in [3] in spezieller Weise bei Benutzung verallgemeinerter Bernsteinscher Polynome gezeigt.

Es scheint sehr schwierig zu sein, die Existenz von Folgen (λ_n) zu beweisen, die die Eigenschaft (M_d) für ein $d>0$ besitzen, die aber nicht (M_0) erfüllen. Bezeichnen Λ_0 und Λ_∞ die Klassen aller (λ_n), für die (A_0) bzw. (A_∞) bezüglich der Dirichletschen Reihen aus Satz 1 und Satz 2 gilt, so folgt unmittelbar $\Lambda_0\subseteq\Lambda_\infty$. Der Beweis von $\Lambda_0\neq\Lambda_\infty$ ist jedoch noch ein offenes Problem. Es sei außerdem darauf hingewiesen, daß sich mittels Bernsteinscher Polynome monotone Folgen (λ_n), $\lambda_n\to\infty$ mit der Eigenschaft (M_0) konstruieren lassen, die keine Teilfolge (λ_{n_i}) mit $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_{n_i}=\infty$ und $\lambda_{n_{i+1}}-\lambda_{n_i}\geqslant c>0$ für ein $c>0$ enthalten. Es lassen sich ferner mit den Überlegungen aus [7, S. 52] leicht monotone Folgen (λ_n) mit $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n=\infty$ und $\lambda_n\to\infty$ so bilden, daß (M_d) für kein $d\geqslant 0$ gilt.

Zur Formulierung der allgemeineren Sätze dieser Arbeit benutzen wir folgende Bezeichungen:

Die auf dem abgeschlossenen Intervall $[c, q]$ stetigen Funktionen K_n $(n=1, 2, \ldots)$ haben für ein $d\in[c, q]$ bezüglich gegebener Zahlen $c_n\neq 0$ die Identitätseigenschaft $I(K_n, [c, q], d, c_n)$, falls $\int_c^q K_n(t)\, d\alpha(t)=\mathcal{O}(c_n)(n\to\infty)$, $\int_c^q |d\alpha(t)|<\infty$ stets $\alpha(t)=0$ auf $[c, d]$ impliziert für jede auf $[c, q]$ normierte Funktion α, wobei α normiert heißt, falls α in $(c, q]$ linksseitig stetig ist mit $\alpha(c)=0$.

Sind die K_n auf $[a, \infty)$ stetig mit $K_n(t)\to 0$ $(t\to\infty)$ für alle n, dann bezeichne $W(K_n, [a, \infty))$ die Eigenschaft, daß

$$\int_a^\infty K_n(t)\, d\alpha(t)=0\ (n=1, 2, \ldots), \qquad \int_a^\infty |d\alpha(t)|<\infty$$

mit normiertem α stets $\alpha(t)=0$ auf $[a, \infty)$ impliziert.

Die Bedingung $B(K_n, [c, q], d, c_n)$ bedeutet, daß zu jeder auf $[c, q]$

stetigen Funktion f mit $f(s)=0$ auf $[d, q]$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $P(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n K_n(s)$ existiert mit

$$|f(s)-P(s)| < \varepsilon \; (s \in [c, q]) \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{N} |a_n|\,|c_n| < \varepsilon.$$

Wir beweisen als Hauptergebnis

SATZ 4. *Für das System S mit $K_n \in C(0, \infty]$ gelte $K_n(s) \to 0 (s \to \infty)$ für $n = 1, 2, \ldots$. Es existiere ferner ein $a_0 > 0$ so, daß es zu jedem $q \in (0, a_0)$ eine natürliche Zahl n_q sowie eine Konstante $M_q > 0$ gibt mit*

$$K_n(q) \neq 0 \qquad (n > n_q) \tag{1}$$

und

$$|K_n(s)| \leqslant M_q \, |K_n(q)| \qquad (s \geqslant q, n > n_q). \tag{2}$$

Das System S hat genau dann die Eigenschaft (A_0), wenn die beiden Bedingungen erfüllt sind:

$$\textit{Für jedes } a > 0 \textit{ gilt } W(K_n, [a, \infty)), \tag{3}$$

und

zu jedem $q \in (0, a_0)$ existiert ein $d_q \in (0, q]$, so daß $I(K_n, [c, q], d_q, K_n(q))$ für alle $c \in (0, d_q)$ gilt. (4)

Dabei ist $I(K_n, [c, q], d_q, K_n(q))$ in (4) mit $B(K_n, [c, q], d_q, K_n(q))$ äquivalent.

Ein System S mit den Eigenschaften (1), (2) und (3), für das aber (A_0) nicht gilt, erhält man zum Beispiel durch $K_n(s) = (sn+1)^{-1}$. Für diese K_n ist (4) wegen $\int_c^q (tn+1)^{-1}\, dt = \mathcal{O}(K_n(q))$ $(n \to \infty)(0 < c < q)$ offensichtlich nicht erfüllt, und (3) läßt sich bei Umformung der K_n in Laplaceintegrale zeigen.

Als Anwendung von Satz 4 beweisen wir

SATZ 5. *Die Funktion g sei für $|z| < 1$ analytisch mit $g(0) = 0$ und g nicht identisch 0. Ferner sei $\lambda_n > 0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$ und $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant c > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dann hat das System S mit $K_n(s) = g(e^{-s\lambda_n})$ die Eigenschaft (A_0).*

Bei der Substitution $s = e^{-t}$ geht $C(0, \infty]$ in $C[-\infty, \infty)$ über, und wir erhalten aus Satz 4 für das Problem (A_∞) unmittelbar

SATZ 6. *Für das System S mit $K_n \in C[-\infty, \infty)$ gelte $K_n(s) \to 0$ $(s \to -\infty)$ für $n = 1, 2, \dots$. Es existiere ferner ein $a_0 \in (-\infty, \infty)$ so, daß es zu jedem $q > a_0$ eine natürliche Zahl n_q sowie eine Konstante $M_q > 0$ gibt mit*

$$K_n(q) \neq 0 \qquad (n > n_q) \tag{5}$$

und

$$|K_n(s)| \leqslant M_q\, |K_n(q)| \qquad (s \leqslant q, n > n_q). \tag{6}$$

Das System S hat genau dann die Eigenschaft (A_∞), wenn die beiden Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{Für jedes } a \in (-\infty, \infty) \text{ gilt } \tilde{W}(K_n, (-\infty, a]), \tag{7}$$

und

$$\begin{gathered}\text{zu jedem } q > a_0 \text{ existiert ein } d_q \geqslant q, \text{ so daß} \\ \tilde{I}(K_n, [q, c], d_q, K_n(q)) \text{ für alle } c > d_q \text{ gilt.}\end{gathered} \tag{8}$$

Dabei ist $\tilde{I}(K_n, [q, c], d_q, K_n(q))$ in (8) mit $\tilde{B}(K_n, [c, q], d_q, K_n(q))$ äquivalent.

Die Bedingung $\tilde{W}(K_n, (-\infty, a])$ ist entsprechend definiert wie $W(K_n, [a, \infty))$ aus Satz 4. $\tilde{I}(K_n, [q, c], d, c_n)$ bedeutet jetzt, daß $\int_q^c K_n(t)\, d\alpha(t) = \mathcal{O}(c_n)$, $\int_q^c |d\alpha(t)| < \infty$ stets $\alpha(t) = 0$ auf $[d, c]$ impliziert, wobei α jetzt rechtsseitig stetig in $[q, c)$ mit $\alpha(c) = 0$ ist. Es bedeutet $\tilde{B}(K_n, [q, c], d, c_n)$, daß zu jeder auf $[q, c]$ stetigen Funktion f mit $f(s) = 0$ auf $[q, d]$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $P(s) = \sum_{n=1}^N a_n K_n(s)$ existiert mit $|f(s) - P(s)| < \varepsilon$ $(s \in [q, c])$ und $\sum_{n=1}^N |a_n|\, |c_n| < \varepsilon$.

Für (A_∞) läßt sich Satz 5 nicht in entsprechender Weise auf ganze Funktionen g mit $K_n(s) = g(e^{s\lambda_n})$ übertragen. Als Anwendung von Satz 6 beweisen wir aber

SATZ 7. *Es sei $P(x) = \sum_{k=1}^N b_k x^k$ ein Polynom mit $b_N \neq 0$, $N \geqslant 2$. Das System S mit $K_n(s) = P(e^{sn})$ $(n = 1, 2, \dots)$ hat genau dann die Eigenschaft (A_∞), wenn $\tilde{W}(K_n, (-\infty, 0])$ gilt. Ist für die Koeffizienten von $P(x)$ ferner $B(x) = \sum_{k=1}^N b_k k^{ix} \neq 0$ $(-\infty < x < \infty)$, so hat S die Eigenschaft (A_∞).*

Außerdem erhalten wir

SATZ 8. *Zu jedem Polynom $P(x) = \sum_{k=1}^N b_k x^k$, $b_N \neq 0$, $N \geqslant 1$ gibt es ein $d > 0$, so daß das System S mit $K_n(s) = P(de^{sn})$ die Eigenschaft (A_∞) hat.*

Zum Beweis von Satz 4 benutzen wir die folgenden funktionalanalytischen Hilfsmittel: Ist X ein linearer normierter Raum mit der Norm

$\|f\|$ für $f \in X$, und ist $G \subseteq X$, dann sagen wir, daß das System S mit den Elementen $K_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bezüglich gegebener Zahlen $c_n \neq 0$ die Identitätseigenschaft $I_G(K_n, c_n)$ hat, falls für jedes beschränkte lineare Funktional F auf X aus $F(K_n) = \mathcal{O}(c_n)$ $(n \to \infty)$ stets $F(f) = 0$ für alle $f \in G$ folgt.

Als wesentlichen Hilfssatz benutzen wir

SATZ 9. *Es sei X ein linearer normierter Raum mit der Norm $\|f\|$ für $f \in X$, und es sei $G \subseteq X$. Ferner sei S ein System mit Elementen $K_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und es seien $c_n \neq 0$ gegebene Zahlen.*
Genau dann gibt es zu jedem $f \in G$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $P = \sum_{n=1}^{N} a_n K_n$ aus X mit

$$\|f - P\| < \varepsilon \qquad \textit{und} \qquad \sum_{n=1}^{N} |a_n|\, |c_n| < \varepsilon,$$

wenn $I_G(K_n, c_n)$ gilt.

Satz 9 wurde in [6, Satz 4] für den Spezialfall $G = X$ bewiesen. Für beliebige $G \subseteq X$ verläuft dieser Beweis jedoch ganz analog zu [6, S. 24–25].

Beweis zu Satz 4. Es sei zunächst (A_0) für das System S vorausgesetzt, und wir haben (3) und (4) zu zeigen. Ist $a > 0$, so existiert wegen (A_0) zu jeder auf $[a, \infty)$ stetigen Funktion f mit $f(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine für $s > 0$ absolut konvergente Reihe $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n K_n(s)$ mit $|f(s) - g(s)| < \varepsilon$ $(s \geqslant a)$. Da $g(s)$ nach (2) auf $[a, \infty)$ gleichmäßig konvergiert, so gibt es ein N mit $|f(s) - \sum_{n=1}^{N} a_n K_n(s)| < 2\varepsilon$ $(s \geqslant a)$, woraus bekanntlich $W(K_n, [a, \infty))$ und damit (3) folgt. Zum Beweis von (4) nehmen wir an, daß zu einem $q \in (0, a_0)$ kein $d_q \in (0, q]$ existiert mit $I(K_n, [c, q], d_q, K_n(q))$ für alle $c \in (0, d_q)$. Zu jedem $d \in (0, q)$ gibt es dann ein Intervall $[c, b]$ mit $0 < c < b \leqslant d$ sowie eine auf $[c, q]$ normierte Funktion α mit $\int_c^b d\alpha(t) \neq 0$ und

$$\int_c^q K_n(t)\, d\alpha(t) = \mathcal{O}(K_n(q))(n \to \infty), \int_c^q |d\alpha(t)| < \infty.$$

Für dieses α darf dabei zusätzlich

$$\left| \int_c^q K_n(t)\, d\alpha(t) \right| \leqslant |K_n(q)|\ (n > n_q),$$

$$\left| \int_c^q K_n(t)\, d\alpha(t) \right| \leqslant 1\ (1 \leqslant n \leqslant n_q)$$

und $\int_c^q |d\alpha(t)| \leqslant 1$ mit n_q nach (1), (2) gefordert werden. Bei Beachtung der linksseitigen Stetigkeit von α im Punkt b können wir außerdem noch zu jedem $B > 0$ eine Funktion $w \in C(0, \infty]$ mit $w(t) = 0$ $(t \geqslant b)$ so bestimmen, daß gilt

$$\left| \int_c^q w(t)\, d\alpha(t) \right| = \left| \int_c^b w(t)\, d\alpha(t) \right| > B.$$

Wir wählen nun Intervalle $[c_k, b_k]$ mit $0 < c_k < b_k < q$, $b_{k+1} < c_k$ $(k = 1, 2, ...)$ und $b_k \to 0$ $(k \to \infty)$ sowie auf $[c_k, q]$ normierte Funktionen α_k mit $\int_{c_k}^{b_k} d\alpha_k(t) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_k}^q K_n(t)\, d\alpha_k(t) \right| &\leqslant |K_n(q)| \ (n > n_q), \\ \left| \int_{c_k}^q K_n(t)\, d\alpha_k(t) \right| &\leqslant 1 \ (1 \leqslant n \leqslant n_q) \end{aligned} \tag{9}$$

und

$$\int_{c_k}^q |d\alpha_k(t)| \leqslant 1 \qquad (k = 1, 2, ...). \tag{10}$$

Ferner bestimmen wir sukzessiv zu $k = 1, 2, ...$ Funktionen $w_k \in C(0, \infty]$ mit $w_k(t) = 0$ $(t \geqslant b_k)$ und

$$\left| \int_{c_k}^q w_k(t)\, d\alpha_k(t) \right| > k + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{c_k}^q |w_i(t)|\, |d\alpha_k(t)| \qquad (k = 2, 3, ...). \tag{11}$$

Es sei

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(t). \tag{12}$$

Die Reihe (12) konvergiert dann absolut für $t > 0$ wegen $w_i(t) = 0$ $(t \geqslant b_i)$, und es gilt $f \in C(0, \infty]$, $f(t) = 0$ $(t \geqslant q)$ mit $f(t) = \sum_{i=1}^k w_i(t)$ $(t \geqslant c_k$, $k = 1, 2, ...)$.

Aus (11) und (12) folgt daher

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_k}^q f(t)\, d\alpha_k(t) \right| &= \left| \int_{c_k}^q \sum_{i=1}^k w_i(t)\, d\alpha_k(t) \right| \\ &\geqslant \left| \int_{c_k}^q w_k(t)\, d\alpha_k(t) \right| - \sum_{i=1}^{k-1} \int_{c_k}^q |w_i(t)|\, |d\alpha_k(t)| > k \\ &\qquad (k = 2, 3, ...). \end{aligned} \tag{13}$$

Bei Beachtung von (A_0) können wir daher $f(t)$ nach (10) und (13) so gut asymptotisch durch eine für $t>0$ absolut konvergente Reihe $g(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n K_n(t)$ approximieren, daß gilt

$$\left|\int_{c_k}^{q} g(t)\, d\alpha_k(t)\right| > k-1 \qquad (k=2, 3, ...). \tag{14}$$

Wir erhalten aber als Widerspruch zu (14) aus (9) und (10)

$$\begin{aligned}\left|\int_{c_k}^{q} g(t)\, d\alpha_k(t)\right| &\leqslant |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left|\int_{c_k}^{q} K_n(t)\, d\alpha_k(t)\right| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{n_q} |a_n| + \sum_{n=n_q+1}^{\infty} |a_n|\, |K_n(q)| = D < \infty \\ &\qquad\qquad (k=2, 3, ...).\end{aligned} \tag{15}$$

Dabei ergibt sich die Zulässigkeit der Vertauschung von Summe und Integral in (15) nach (2) und (10) aus

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_{c_k}^{q} |K_n(t)|\, |d\alpha_k(t)| \\ &\quad \leqslant \sum_{n=1}^{n_{c_k}} |a_n| \int_{c_k}^{q} |K_n(t)|\, |d\alpha_k(t)| \\ &\quad\quad + M_{c_k} \sum_{n=n_{c_k}+1}^{\infty} |a_n|\, |K_n(c_k)| < \infty \qquad (k=2, 3, ...),\end{aligned}$$

so daß (4) bewiesen ist.

Umgekehrt seien (3) und (4) vorausgesetzt, und wir haben (A_0) zu zeigen. Die Äquivalenz der Bedingungen $I(K_n, [c, q], d, K_n(q))$ und $B(K_n, [c, q], d, K_n(q))$ für alle $0<c<d\leqslant q<a_0$ folgt aus Satz 9 bei Beachtung von (1), wenn wir $X=C[c, q]$ mit der üblichen Maximumsnorm und $G\subseteq C[c, q]$ als die Klasse der $f\in C[c, q]$ mit $f(s)=0$ auf $[d, q]$ wählen, wobei die Darstellung der beschränkten linearen Funktionale auf $C[c, q]$ nach [8, S. 139] zu beachten ist.

Es sei f, $h\in C(0, \infty]$ mit h positiv auf $(0, \infty)$ und $h(s)\to b>0$ $(s\to\infty)$, wobei ferner $f(s)\to 0$ $(s\to\infty)$ und h als monoton wachsend auf $(0, \infty)$ angenommen werden darf. Wir wählen nach (4) Zahlen $q_k\in(0, a_0)$ und $d_k\in(0, q_k]$ mit $q_{k+1}<q_k$ $(k=1, 2, ...)$ und $q_k\to 0$ $(k\to\infty)$, so daß $I(K_n, [c, q_k], d_k, K_n(q_k))$ für alle $c\in(0, d_k)$ gilt. Dabei darf außerdem $d_{k+1}<d_k$ und

$$h(d_{k+1}) < h(d_k)/2 \qquad (k=1, 2, ...) \tag{16}$$

angenommen werden.

Wir bestimmen nun sukzessiv verallgemeinerte Polynome $P_k(s)=\sum_{n=1}^{N_k} a_n^{(k)} K_n(s)$ $(k=1, 2, \ldots)$ in folgender Weise:
Es sei P_1 nach (3) gewählt mit

$$|f(s)-P_1(s)|<h(d_1)/4 \qquad (s \geqslant d_1). \tag{17}$$

Sind die Polynome $P_i(i=1, 2, \ldots, k-1)$ für $k=2, 3, \ldots$ bereits bestimmt, so setzen wir

$$b_{k-1}=f(d_{k-1})-\sum_{i=1}^{k-1} P_i(d_{k-1}). \tag{18}$$

Somit ist $f(s)-\sum_{i=1}^{k-1} P_i(s)-b_{k-1}=0$ für $s=d_{k-1}$.
Wegen $I(K_n, [d_k, q_{k-1}], d_{k-1}, K_n(q_{k-1}))$ können wir daher nach Satz 9 und (1) ein P_k mit $a_n^{(k)}=0$ $(1 \leqslant n \leqslant n_{q_{k-1}})$ so wählen, daß

$$\left| f(s)-\sum_{i=1}^{k-1} P_i(s)-b_{k-1}-P_k(s)\right|<h(d_k)/4 \qquad (d_k \leqslant s \leqslant d_{k-1}), \tag{19}$$

$$|P_k(s)|<h(d_k)/4 \qquad (d_{k-1} \leqslant s \leqslant q_{k-1}), \tag{20}$$

und

$$\sum_{n=1}^{N_k} |a_n^{(k)}|\,|K_n(q_{k-1})|<h(d_k)/4M_{q_{k-1}} \qquad (k=2, 3, \ldots) \tag{21}$$

mit $M_{q_{k-1}}$ nach (2).
Es folgt aus (2) und (21)

$$\begin{aligned} |P_k(s)| &\leqslant \sum_{n=1}^{N_k} |a_n^{(k)}|\,|K_n(s)| \leqslant M_{q_{k-1}} \sum_{n=1}^{N_k} |a_n^{(k)}|\,|K_n(q_{k-1})| \\ &< h(d_k)/4 \qquad (s \geqslant q_{k-1}) \end{aligned} \tag{22}$$

wegen $a_n^{(k)}=0$ $(1 \leqslant n \leqslant n_{q_{k-1}})$. Aus (20) erhalten wir somit

$$|P_k(s)|<h(d_k)/4 \qquad (s \geqslant d_{k-1}). \tag{23}$$

Für $s=d_k$ ergibt sich aus (19) bei Beachtung von (18)

$$|b_k-b_{k-1}|<h(d_k)/4, \tag{24}$$

so daß $a_0=\lim_{k \to \infty} b_k$ wegen (16) existiert.

Aus (19) folgt daher nach (16) und (24)

$$\begin{aligned}
&\left| f(s) - \sum_{i=1}^{k} P_i(s) - a_0 \right| \\
&\quad < h(d_k)/4 + |b_{k-1} - a_0| \\
&\quad \leqslant h(d_k)/4 + \sum_{n=k}^{\infty} |b_{n-1} - b_n| < h(d_k)/4 + 4^{-1} \sum_{n=k}^{\infty} h(d_n) \\
&\quad < h(d_k)/4 + h(d_k) \cdot 4^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} < 3 \cdot 4^{-1} h(d_k) \\
&\qquad\qquad (d_{k-1} \leqslant s \leqslant d_k;\, k = 2, 3, \ldots). \qquad (25)
\end{aligned}$$

Es ist $|a_0| \leqslant |b_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n+1} - b_n| < |b_1| + 4^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} h(d_{n+1}) < |b_1| + h(d_1)/4$ nach (16) und (24). Mit $|b_1| < h(d_1)/4$ nach (17) und (18) folgt daher $|a_0| < h(d_1)/2$, so daß wir aus (17) erhalten

$$|f(s) - P_1(s) - a_0| < 3 \cdot 4^{-1} h(d_1) \qquad (s \geqslant d_1). \tag{26}$$

Wir setzen

$$g(s) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(s), \tag{27}$$

wobei diese Reihe nach (16) und (23) für alle $s > 0$ absolut konvergiert.

Ist nun $s \in [d_k, d_{k-1}]$ $(k = 2, 3, \ldots)$ oder $s \in [d_1, \infty)$ im Falle $k = 1$, dann ergibt sich aus (16), (23), (25), (26) und (27)

$$\begin{aligned}
|f(s) - g(s)| &\leqslant \left| f(s) - \sum_{n=1}^{k} P_n(s) - a_0 \right| + \sum_{n=k+1}^{\infty} |P_n(s)| \\
&< 3 \cdot 4^{-1} h(d_k) + 4^{-1} \sum_{n=k+1}^{\infty} h(d_n) \\
&< h(d_k) \leqslant h(s),
\end{aligned}$$

so daß wir die gewünschte Approximationseigenschaft (A_0) erhalten.

Nach (16) und (22) ist

$$\sum_{n=1}^{N_k} |a_n^{(k)}|\, |K_n(s)| < 4^{-1} 2^{-k} h(d_1) \qquad (s \geqslant q_{k-1})$$

und daher $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N_k} |a_n^{(k)}|\, |K_n(s)| < \infty$ für alle $s > 0$, so daß sich die Reihe (27) durch Umordnung und Zusammenfassung der $a_n^{(k)} K_n(s)$ aus allen $P_k(s)$ als eine für alle $s > 0$ absolut konvergente Reihe $g(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n K_n(s)$ umformen läßt. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Beweis zu Satz 5. Es sei $g(x)=\sum_{k=p}^{\infty} b_k x^k$ mit $p \geqslant 1$ und $b_p \neq 0$. Für $K_n(t)=g(e^{-t\lambda_n})$ gilt (1) und (2) wegen $\lambda_n \to \infty$ für jedes $a_0>0$, wie man leicht zeigt. Aus $\int_c^q K_n(t)\,d\alpha(t)=\mathcal{O}(K_n(q))=\mathcal{O}(e^{-qp\lambda_n})$ $(n\to\infty)$ und $b_p e^{-tp\lambda_n}=K_n(t)-\sum_{k=p+1}^{\infty} b_k e^{-tk\lambda_n}$ folgt

$$\int_c^q e^{-tp\lambda_n} d\alpha(t)=\mathcal{O}(e^{-qp\lambda_n})+\mathcal{O}(e^{-(p+1)c\lambda_n})(n\to\infty) \tag{28}$$

für $0<c<q$. Nach Satz 3 erhalten wir daher $\alpha(t)=0$ auf $[c, b]$, wobei $b>c$ die kleinere der Zahlen q und $(1+p^{-1})c$ ist. Somit kann c in (28) durch b ersetzt werden. Durch mehrfache Anwendung dieses Schlusses folgt $\alpha(t)=0$ auf $[c, q]$ und damit die Bedingung (4). Entsprechend ergibt sich (3) und daher (A_0) nach Satz 4, womit Satz 5 bewiesen ist.

Beweis zu Satz 2. Für $K_n(s)=e^{s\lambda_n}$ erhält man durch Multiplikation mit $e^{-q\lambda_n}$ die Äquivalenz von $\tilde{I}(K_n, [q, c], d_q, K_n(q))$ und $\tilde{I}(K_n, [0, c-q], d_q-q, 1)$ für alle $q \leqslant d_q < c$. Daher folgt aus der Existenz eines $d_0 \geqslant 0$ mit der Eigenschaft $\tilde{I}(K_n, [0, c], d_0, 1)$ $(c>d_0)$ auch bereits die gesamte Bedingung (8), wenn man $d_q=d_0+q$ für jedes $q\in(-\infty, \infty)$ setzt. Die Existenz eines solchen $d_0 \geqslant 0$ impliziert aber außerdem wegen der Gleichwertigkeit von $\tilde{I}(K_n, [0, c], d_0, 1)$ mit $\tilde{I}(K_n, [-b, c-b], d_0-b, K_n(-b))$ $(b>0)$ auch die Gültigkeit von (7), wie man leicht zeigt. Daher ist die Existenz eines solchen d_0 äquivalent damit, daß (7) und (8) beide gelten. Die Gültigkeit von $\tilde{I}(K_n, [0, c], d_0, 1)$ für alle $c>d_0$ ist aber andererseits auch damit gleichwertig, daß $\tilde{I}(K_n, [0, c+d_0], d_0, 1)$ und daher $\tilde{I}(K_n, [-c-d_0, 0], -c, K_n(-c-d_0))$ für alle $c>0$ erfüllt sind. Letzteres bedeutet aber gerade die Eigenschaft (M_{d_0}). Damit ist Satz 2 bewiesen.

Beweis zu Satz 7. Für $K_n(s)=P(e^{sn})$ gilt (5) und (6) für jedes $a_0>0$, wie man leicht zeigt. Wir substituieren $t=e^s$ für $s\in(-\infty, \infty)$.

Es sei $\int_0^b P(t^n)\,d\alpha(t)=0$ $(n=1, 2, ...)$ für ein $b>1$, und dabei $\int_0^b |d\alpha(t)|<\infty$ mit normiertem α auf $[0, b]$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\left|\int_0^b t^{Nn}\,d\alpha(t)\right| &\leqslant |b_N^{-1}| \sum_{k=1}^{N-1} |b_k| \int_0^b t^{kn}\,|d\alpha(t)| \\ &= \mathcal{O}(b^{(N-1)n}) \qquad (n\to\infty)\end{aligned}$$

und daher $\int_0^1 t^{Nn}\,d\alpha(bt)=\mathcal{O}(b^{-n})(n\to\infty)$.

Nach Satz 3 ist $\alpha(bt)=0$ auf $[b^{-1/N}, 1]$ und damit $\alpha(t)=0$ auf $[b^{1-1/N}, b]$. Bei m-maliger Anwendung dieser Schlußweise ergibt sich $\alpha(t)=0$ auf $[b^{w_m}, b]$ mit $w_m=(1-1/N)^m$ $(m=1, 2, ...)$ und somit $\alpha(t)=0$ auf $[1, b]$ bei Beachtung der rechtsseitigen Stetigkeit von α in 1, so daß

$\int_0^1 P(t^n)\, d\alpha(t) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ folgt. Daher impliziert $\tilde{W}(K_n, (-\infty, 0])$ für diese K_n stets $\tilde{W}(K_n, (-\infty, a])$ für alle $a > 0$. Da aber $\tilde{W}(K_n, (-\infty, 0])$ offensichtlich $\tilde{W}(K_n, (-\infty, a])$ auch für alle $a < 0$ impliziert, so ist (7) mit $\tilde{W}(K_n, (-\infty, 0])$ äquivalent. Die Bedingung (8) ist für diese K_n stets erfüllt. Denn aus

$$\int_q^c P(t^n)\, d\alpha(t) = \mathcal{O}(P(q^n)) \qquad (n \to \infty) \text{ für } 0 < q < c$$

mit $c > 1$ folgt

$$\int_q^c t^{Nn} d\alpha(t) = \mathcal{O}(c^{(N-1)n}) + \mathcal{O}(1) \cdot \sum_{k=1}^{N} q^{kn} \qquad (n \to \infty).$$

Entsprechend wie oben ergibt sich nach Satz 3 daher $\alpha(t) = 0$ auf $[d, c]$, wobei d die größere der Zahlen q und 1 sei, so daß (8) gilt, und (A_∞) nach Satz 6 mit $\tilde{W}(K_n, (-\infty, 0])$ äquivalent ist.

Ist zusätzlich $B(x) \neq 0$ $(-\infty < x < \infty)$ für $P(x)$ vorausgesetzt, so folgt

$$\int_0^\infty t^{-ix} P'(e^{-t})\, e^{-t}\, dt = \Gamma(1 - ix)\, B(x) \neq 0 \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Es bezeichne T die Klasse aller Funktionen g, $g(t) = \sum_{\nu=1}^m a_\nu P'(e^{-tc_\nu})\, e^{-tc_\nu}$ mit beliebigen $c_\nu > 0$ und komplexen a_ν. Es sei $\bar{T}$ die abgeschlossene Hülle von T in $L_1(0, \infty)$ bezüglich der L_1-Norm. Nach dem Approximationssatz von Wiener [2, S. 33] gilt bei Transformation auf $(0, \infty)$ daher $\bar{T} = L_1(0, \infty)$. Zu jedem $f \in C(0, \infty]$ mit $f(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ und jedem $\varepsilon > 0$ läßt sich eine auf $(0, \infty)$ stetigdifferenzierbare Funktion $b \in C(0, \infty]$ mit $b(t) \to 0$ $(t \to \infty)$, $b' \in L_1(0, \infty)$ und $|f(t) - b(t)| < \varepsilon$ $(t > 0)$ wählen. Wegen $\bar{T} = L_1(0, \infty)$ gibt es daher ein $g(t) = \sum_{\nu=1}^m a_\nu P'(e^{-tc_\nu})\, e^{-tc_\nu}$ mit $\|b' - g\|_1 < \varepsilon$ bezüglich der L_1-Norm, so daß für $h(t) = -\sum_{\nu=1}^m a_\nu c_\nu^{-1} P(e^{-tc_\nu})$ folgt

$$\begin{aligned} |f(t) - h(t)| &< \varepsilon + |b(t) - h(t)| \\ &\leqslant \varepsilon + \int_t^\infty |b'(u) - g(u)|\, du < 2\varepsilon \qquad (t > 0). \end{aligned} \tag{29}$$

Jeder Term $P(e^{-tc}) = \sum_{k=1}^N b_k e^{-tck}$ mit einem $c > 0$ in der Summe von $h(t)$ kann aber wegen $W(e^{-tn}, [0, \infty))$ auf $[0, \infty)$ beliebig gut durch Linearkombinationen der $P(e^{-nt})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ approximiert werden, so daß wir $W(B_n, [0, \infty))$ aus (29) für $B_n(t) = P(e^{-tn})$ und daher $\tilde{W}(K_n, (-\infty, 0])$ erhalten, woraus (A_∞) folgt. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Satz 8 folgt direkt aus Satz 7, da sich für das zugehörige $B(x) = \sum_{k=1}^{N} b_k d^k k^{ix}$ für hinreichend großes d wegen $b_N \neq 0$ leicht $B(x) \neq 0$ $(-\infty < x < \infty)$ ergibt.

Literatur

1. T. Carleman, Sur un théorème de Weierstrass, *Ark. Mat. Astronom. Fys.* **20B** (1927), 1–5.
2. R. R. Goldberg, "Fourier Transforms," Cambridge Univ. Press, London/New York, 1962.
3. L. Hoischen, Asymptotische Approximation stetiger Funktionen durch ganze Dirichlet-Reihen, *J. Approx. Theory* **3** (1970), 293–299.
4. L. Hoischen, Approximation und Interpolation durch ganze Funktionen, *J. Approx. Theory* **5** (1975), 116–123.
5. L. Hoischen, Kriterien für die asymptotische Approximation durch Dirichletsche Reihen, *J. Approx. Theory* **45** (1985), 11–18.
6. L. Hoischen, Koeffizientenwachstum bei der Approximation durch verallgemeinerte Polynome, *J. Approx. Theory* **45** (1985), 19–25.
7. J. G. Mikusiński and C. Ryll-Nardzewski, A theorem on bounded moments, *Studia Math.* **13** (1953), 51–55.
8. W. Rudin, "Real and Complex Analysis," McGraw–Hill, New York, 1966.
9. R. Trautner, Density properties of Hausdorff moment sequences, *Tôhoku Math. J.* (2) **24** (1972), 347–352.